
Grondwaterwervels in numerieke en analytische modellen

Kick Hemker
Mark Bakker

Met numerieke modellen kan worden aangetoond dat er in het grondwater vrijwel altijd wervels voorkomen wanneer het watervoerende pakket heterogeen en anisotroop is. Voor zeer eenvoudige modellen, met één of twee homogene anisotrope blokken, werd dit voor het eerst in Stromingen gepubliceerd (Hemker, 2001). Drie-dimensionale stroomlijnen in deze modellen hebben de vorm van spiralen. Een bundel van spiraalvormige stroomlijnen die alle in dezelfde richting draaien, wordt een grondwaterwervel genoemd. Sinds 2001 hebben we vooral analytisch onderzoek naar wervels gedaan. In dit artikel gaat het om wervels in een gelaagd watervoerend pakket waarbij de anisotropie van het pakket per laag verschillend is en ook binnen de lagen varieert. De stroomlijnen laten bij de numerieke en de analytische modellen dezelfde complexe patronen van links- en rechtsom draaiende wervels zien. Voor een zelfde model waarbij de doorlatendheid heterogeen en isotroop is, zouden alle stroomlijnen recht zijn. De praktische betekenis van wervels in de grondwaterstroming is dat er water tussen de lagen wordt uitgewisseld. Dit kan van groot belang zijn voor de verspreiding van verontreinigingen binnen een pakket.

Inleiding

Met eindige-elementenmodellen is onderzocht hoe stationaire grondwaterstroming door heterogeniteit van de anisotropie wordt beïnvloed. Vervolgens zijn analytische oplossingen ontwikkeld die de numerieke resultaten bevestigen. Voor zover ons bekend is dit onderwerp geheel nieuw in het grondwateronderzoek, in tegenstelling tot de talloze artikelen over het effect van heterogeniteit van de doorlatendheid in isotrope, en soms uniform-anisotrope media op de grondwaterstroming. Bij uniform-anisotrope modellen zijn de drie hoofdrichtingen van de anisotropie en de verhouding van de bijbehorende k-waarden op elk punt in het model gelijk, zodat door een simpele verschaling van het anisotrope model een isotroop model kan worden verkregen.

Ons onderzoek begon met eenvoudige numerieke modellen met één of twee homogene anisotrope blokken in een verder homogeen en isotroop pakket. De drie-dimensionale stroomlijnen in deze modellen zijn spiraalvormig, en bundels van zulke stroomlijnen werden grondwaterwervels genoemd. Over dit onderwerp werd voor het eerst in Stromingen

Kick Hemker is zelfstandig geohydroloog en verbonden aan de Faculteit der Aard- en Levenswetenschappen van de Vrije Universiteit Amsterdam, De Boelelaan 1085-1087, 1081 HV Amsterdam, hemker@microfem.nl.

Mark Bakker is werkzaam bij het Department of Biological and Agricultural Engineering, University of Georgia, Athens, GA 30602, USA, mbakker@enr.uga.edu.

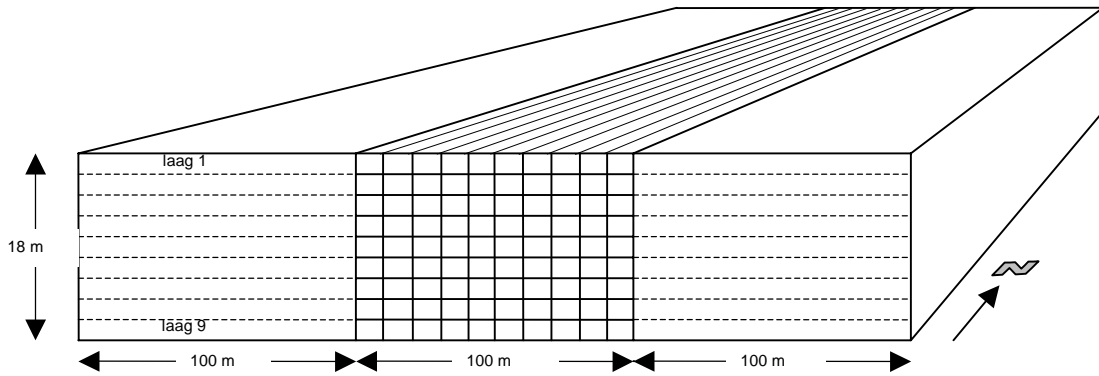
gepubliceerd (Hemker, 2001). Toen kort daarop bleek dat bij putstroming in gelaagde pakketten nog veel boeiender patronen van wervels bleken op te treden, hebben we deze resultaten beschreven en in augustus 2001 aan het Amerikaanse vakblad 'Ground Water' aangeboden. Het manuscript werd echter afgewezen omdat onze buitenlandse collega-hydrologen meenden dat grondwaterwervels niet konden bestaan en het waargenomen verschijnsel wel een fout van de gebruikte software zou zijn. Door het leveren van nieuw (analytisch) bewijs en het inschakelen van twee internationaal gerenommeerde hydrologen is het uiteindelijk toch gelukt het artikel gepubliceerd te krijgen (Hemker e.a., 2004). In het najaar van 2001 zijn we begonnen met een analytische aanpak van het wervel-probleem bij putstroming in een gelaagd pakket. Door uit te gaan van een gelijke onttrekkingskegel in elke laag (Dupuit-benadering) bleek het mogelijk een analytische oplossing te vinden die dezelfde wervels laat zien als de numerieke modellen (Bakker en Hemker, 2002). Pogingen om hetzelfde probleem analytisch op te lossen zonder van de Dupuit-benadering uit te gaan, zijn tot dusverre mislukt, maar er is zeer recent wel een benaderende oplossing beschikbaar gekomen voor het geval de hoofdrichtingen van de anisotropie in alle lagen gelijk zijn (Meesters e.a., 2004).

In dit artikel beschouwen we hypothetische modellen die met het eindige-elementenprogramma MicroFEM (MDS, 2004) en met recent ontwikkelde analytische oplossingsmethoden (Bakker en Hemker, 2004; Hemker e.a., in voorbereiding) zijn doorgerekend. Het betreft gelaagde pakketten die ook zijdelings in vele stroken zijn opgedeeld, waardoor een rechthoekig patroon van homogene anisotrope cellen ontstaat (figuur 1).

Hoewel in werkelijkheid de heterogeniteit in alle richtingen een rol speelt, wordt de doorlatendheid in één richting (noord) gelijk gehouden. Het voordeel hiervan is dat de gekromde vorm van elke stroomlijn dan steeds op dezelfde manier wordt herhaald, zodat de belangrijkste eigenschappen van het stromingsbeeld in een twee-dimensionaal figuur kunnen worden afgebeeld. Bovendien maakt het de analytische oplossing mogelijk. Verder geldt dat één van de hoofdrichtingen van de doorlatendheid steeds verticaal is gekozen, omdat het gebruikte numerieke programma en de ontwikkelde analytische oplossingen dit vereisen. Voor de wervelvorming is dit geen probleem aangezien hiervoor alleen een verandering van de horizontale anisotropie tussen aangrenzende laagvlakken benodigd is. Verder hebben we alleen de hoofdrichtingen van de horizontale anisotropie van cel tot cel verschillend gemaakt om de effecten van een heterogene anisotropie zoveel mogelijk te scheiden van de effecten van heterogene k -waarden. Dit betekent dat alle hoofdwaarden van de doorlatendheid hetzelfde zijn in het hele model en alleen de hoofdrichtingen van de horizontale anisotropie ruimtelijk variëren.

Een MicroFEM-model

Hoewel we tientallen modellen hebben gemaakt en vergeleken, zullen we ons hier tot één model beperken. Een 18 m dik afgesloten watervoerend pakket bestaat uit negen lagen van gelijke dikte. De horizontale anisotropie is heterogeen in een 100 m brede doorsnede van het model; elke laag in deze doorsnede is verdeeld in tien stroken van gelijke breedte. Op deze manier laat elke dwarsdoorsnede loodrecht op de stroken een regelmatig patroon zien van 9-bij-10 cellen, waarbij elke cel 10 m breed en 2 m dik is (figuur 1). Aan beide zijden van dit in cellen opgedeelde gebied liggen 100 m brede homogene stroken om het eventuele effect van de ondoorlatende randen van het model uit te sluiten.



Figuur 1: Een gelaagd pakket spanningswater met een heterogeen-anisotrope zone in het midden.

De hoofdwaarden van de horizontale doorlatendheid zijn 10 en 5 m/dag in het gehele model, en de verticale doorlatendheid is 1 m/dag in alle lagen. De globale stroming is in de lengterichting van de stroken (noord). De hoofdrichting van de horizontale doorlatendheid is ook noord in de twee randgebieden, maar varieert tussen -45° (noordwest) en 45° (noordoost) in de 90 cellen in het midden. Voor de twee-dimensionale ruimtelijke verdeling van de hoofdrichting is in dit model uitgegaan van een uniforme verdeling met noord als gemiddelde: $-45^\circ, -35^\circ, -25^\circ, \dots, 45^\circ$. Deze tien richtingen zijn voor elke laag in een willekeurige (random) volgorde aan de cellen toegekend. De gebruikte waarden zijn in tabel 1 weergegeven.

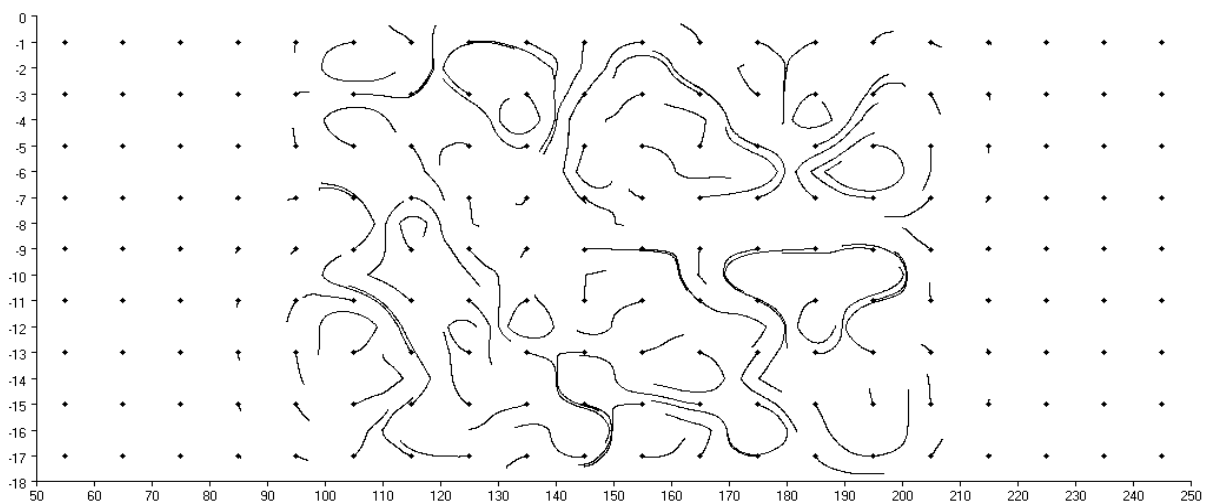
Tabel 1: De hoofdrichtingen (graden t.o.v. N) van de horizontale anisotropie in alle ($9 * 12$) cellen van het model.

0	-35	5	15	35	-15	-25	-5	25	-45	45	0
0	25	35	-35	15	-45	-5	-25	5	-15	45	0
0	-35	25	-15	-25	-5	15	5	-45	45	35	0
0	-35	35	5	-25	15	-5	45	25	-15	-45	0
0	15	-5	25	-45	35	45	5	-35	-15	-25	0
0	-45	-35	25	-25	5	-15	15	35	-5	45	0
0	25	-45	-5	35	-25	5	15	-15	45	-35	0
0	35	5	-15	-35	25	-45	-25	15	45	-5	0
0	45	-25	-35	-5	-15	15	5	-45	35	25	0

Voor de berekening van de drie-dimensionale stijghoogteverdeling en het bijbehorende stromingspatroon is een MicroFEM model met 18 lagen van 1 m dikte gemaakt. Uit eerder onderzoek met eenvoudige testmodellen is gebleken dat een vergroting van het aantal modellagen tot nauwkeuriger resultaten leidt (Bakker en Hemker, 2004). De horizontale afmetingen van het model zijn 300 bij 300 meter. De horizontale knooppuntafstand is precies 2 m in het centrale deel, en dit neemt geleidelijk toe tot bijna 10 m aan de oost- en westrand. Het totale aantal knooppunten is 11.668 per laag. De oost- en westrand van het model zijn ondoorlatend. Op de zuidrand hebben de knooppunten in alle lagen een gelijke vaste stijghoogte en op de gehele noordrand is de vaste stijghoogte 0,3 m lager.

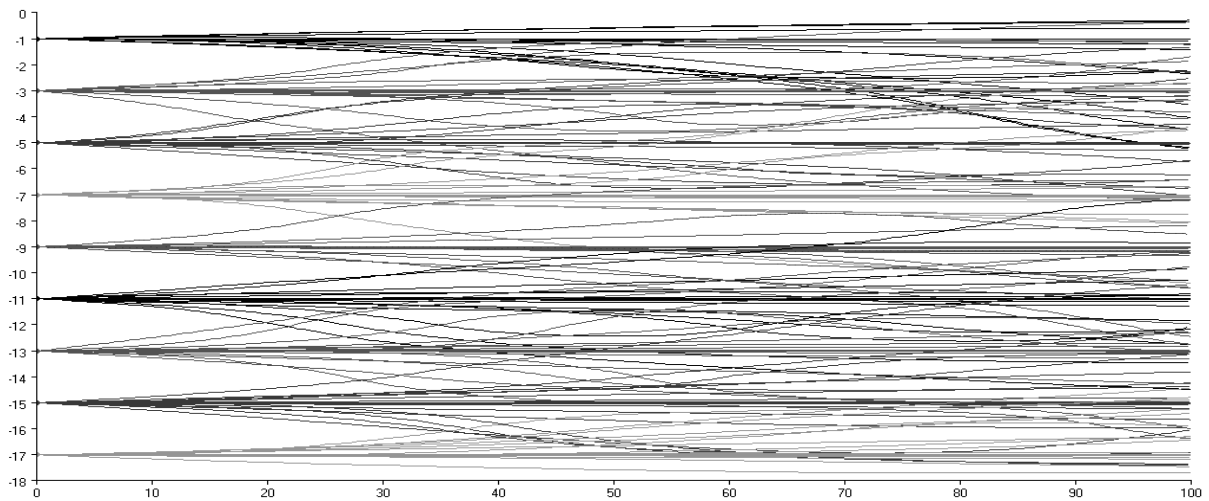
Numerieke en analytische resultaten

Wanneer het model heterogeen en isotroop of uniform-anisotroop zou zijn, dan zouden alle stroomlijnen rechte lijnen zijn die precies naar het noorden stromen. De projectie van elke stroomlijn op een dwarsprofiel wordt dan een punt. Feitelijk geldt dit alleen onder voorwaarde dat in het gehele model de gradiënt in noordelijke richting overal gelijk is. In het numerieke model wordt dit echter enigszins verstoord door de constante stijghoogtes op de noord- en zuidrand. (In de dwarsprofielen zijn de stijghoogtes namelijk niet precies gelijk, zoals hierna zal blijken.) Met deze randeffecten wordt rekening gehouden door alleen stroomlijnen in het midden van het model te beschouwen. Figuur 2 laat de projectie op een dwarsprofiel zien van 20 stroomlijnen in elk van de 9 lagen van het anisotrope model. De stroomlijnen starten precies in het midden van elke cel en op gelijke afstanden aan de linker en rechterzijde in de homogene randgebieden. Alle startpunten liggen op 100 m ten noorden van de zuidrand en de lijnen lopen door tot 100 m ten zuiden van de noordrand.

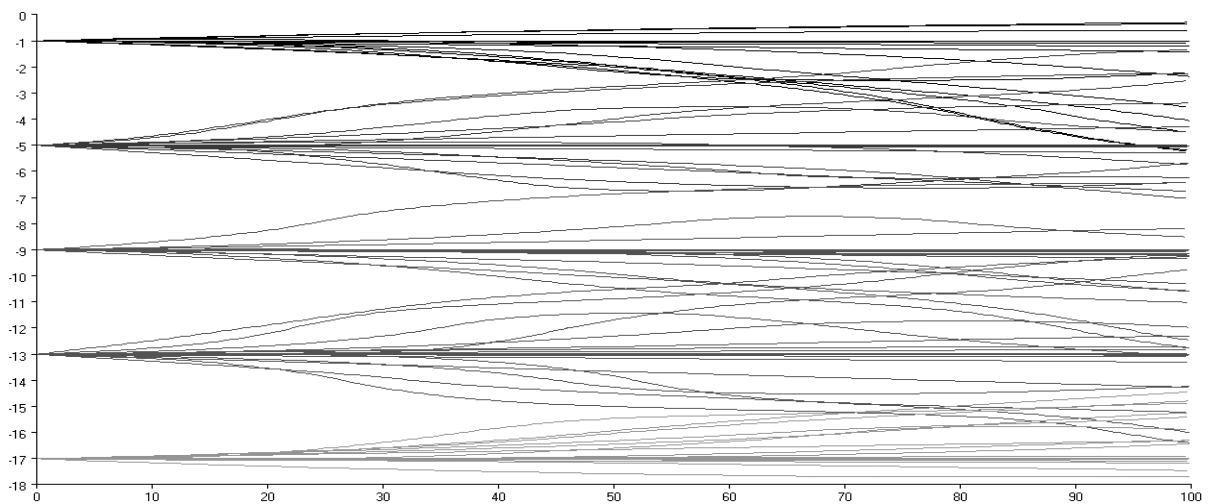


Figuur 2: Dwarsprofiel met $9 * 20$ geprojecteerde stroomlijnen berekend met MicroFEM. Om de stromingsrichting aan te geven beginnen alle stroomlijnen met een stip.

Door het analyseren van de geprojecteerde stroomlijnen in figuur 2 wordt het wervelpatroon in grote lijnen wel duidelijk. Grote en kleine wervels komen naast elkaar voor en draaien in tegengestelde richtingen. De wervels dringen ongeveer 20 m door in de homogene gebieden aan beide zijden. Dezelfde stroomlijnen zijn in figuur 3 op een zuid-noord profiel geprojecteerd. Omdat deze lijnen sterk door elkaar heen lopen is in figuur 4 hetzelfde getekend voor een beperkt deel van de stroomlijnen. Hieruit blijkt duidelijk hoe groot de verticale uitwisseling is die als gevolg van de wervels tussen de aangrenzende lagen plaatsvindt.

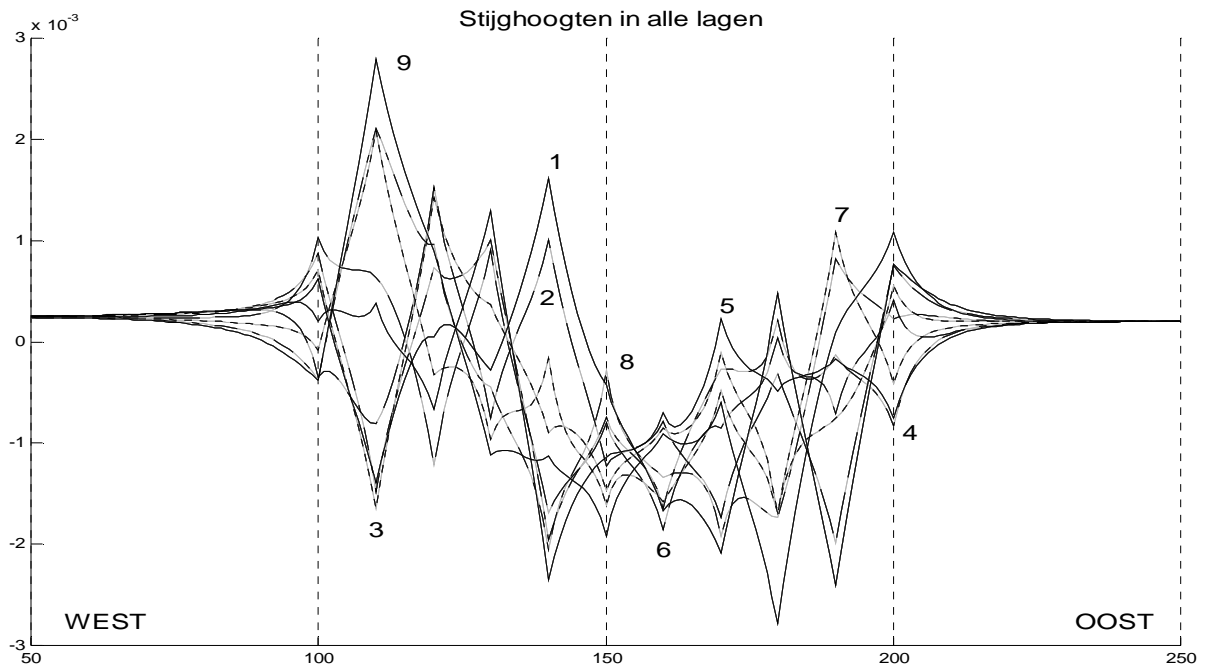


Figuur 3: Zuid-noord profiel met alle $9 * 20$ stroomlijnen uit figuur 2 in zij aanzicht.

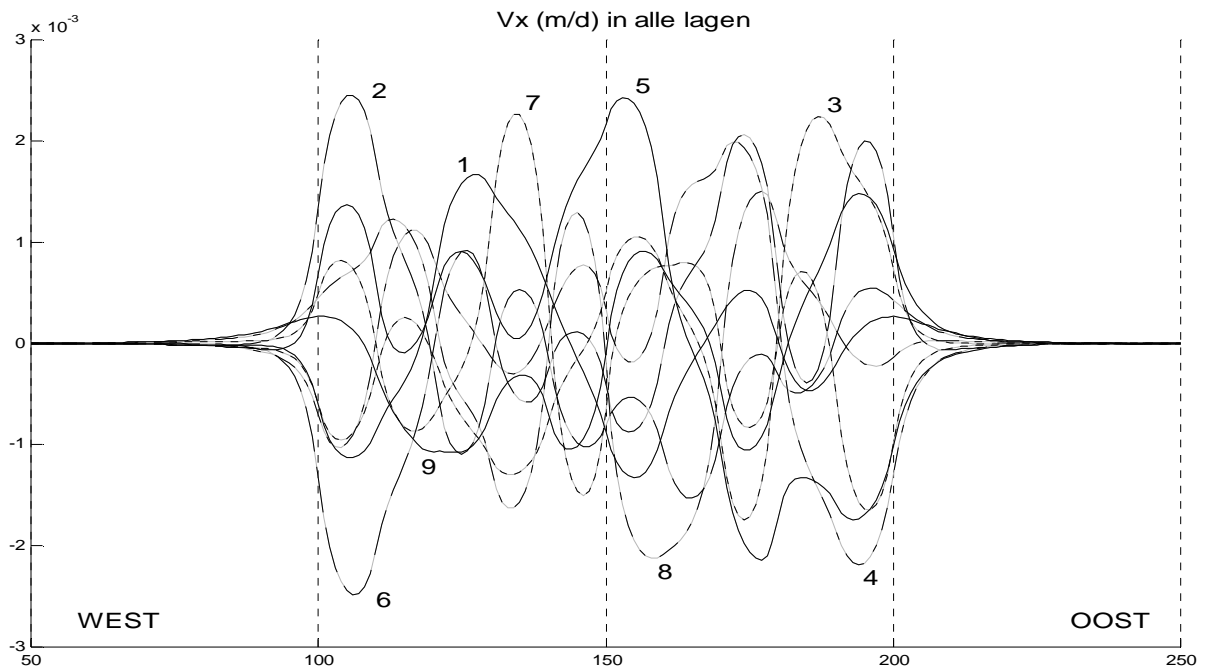


Figuur 4: Zuid-noord profiel met de $5 * 20$ stroomlijnen uit figuur 3 die in laag 1, 3, 5, 7 en 9 starten.

Met onlangs ontwikkelde analytische oplossingen voor de stroming in heterogene en anisotrope gelaagde pakketten (Hemker e.a., in voorbereiding) is het mogelijk de numerieke resultaten op een onafhankelijke manier te controleren. De analytische oplossing is exact, maar vereist wel dat de cellen over de gehele lengte van het model homogeen zijn, zoals ook in het hier beschreven model (figuur 1) is aangenomen. Het stijghoogteverloop van west naar oost is voor de negen lagen in figuur 5 weergegeven. In de buitenste delen van de homogene randgebieden treedt geen verticale stroming op en zijn de stijghoogtes in alle lagen gelijk, maar in het heterogene centrale deel gaan de wervels gepaard met verticale stijghoogteverschillen van enkele millimeters. Figuur 6 laat de oostwaartse component van het specifieke debiet voor alle negen lagen zien. In tegenstelling tot de scherpe knikken in het stijghoogteverloop tussen de cellen (figuur 5) veranderen de dwarsfluxen veel geleidelijker, omdat de uitstroming van elke cel gelijk moet zijn aan de instroming van de aangrenzende cel.

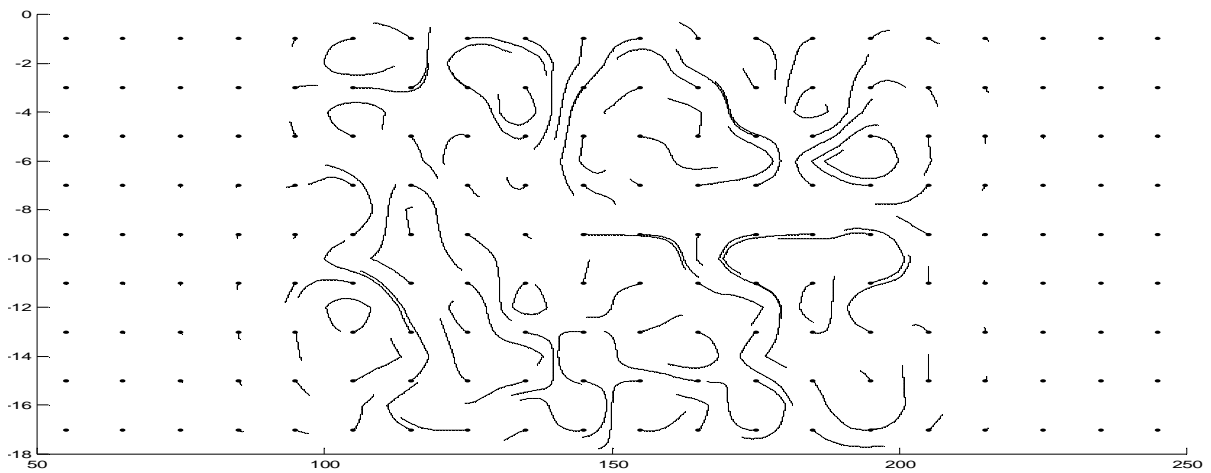


Figuur 5: Analytisch berekende stijghoogtes (m) in een dwarsprofiel voor alle negen lagen van het water-voerende pakket.

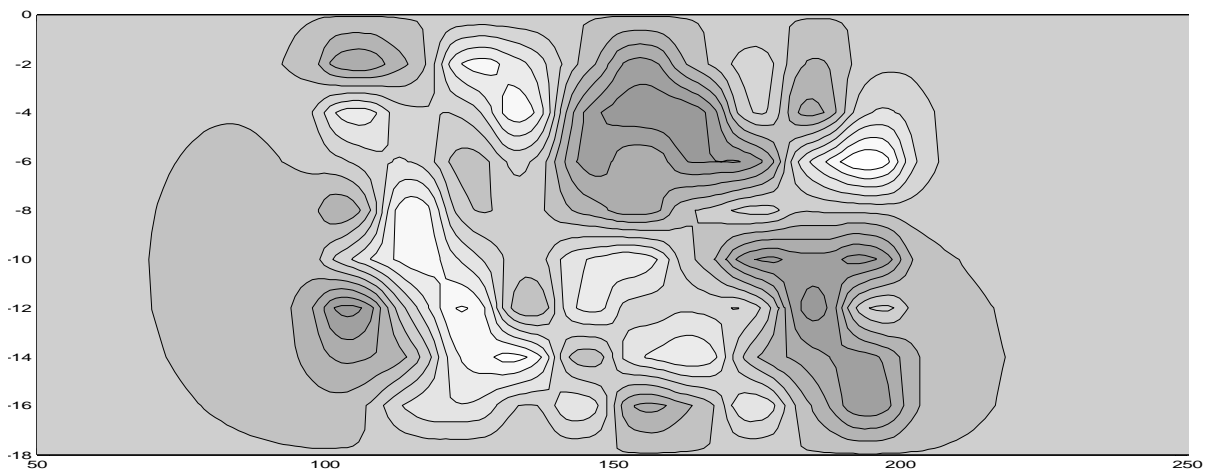
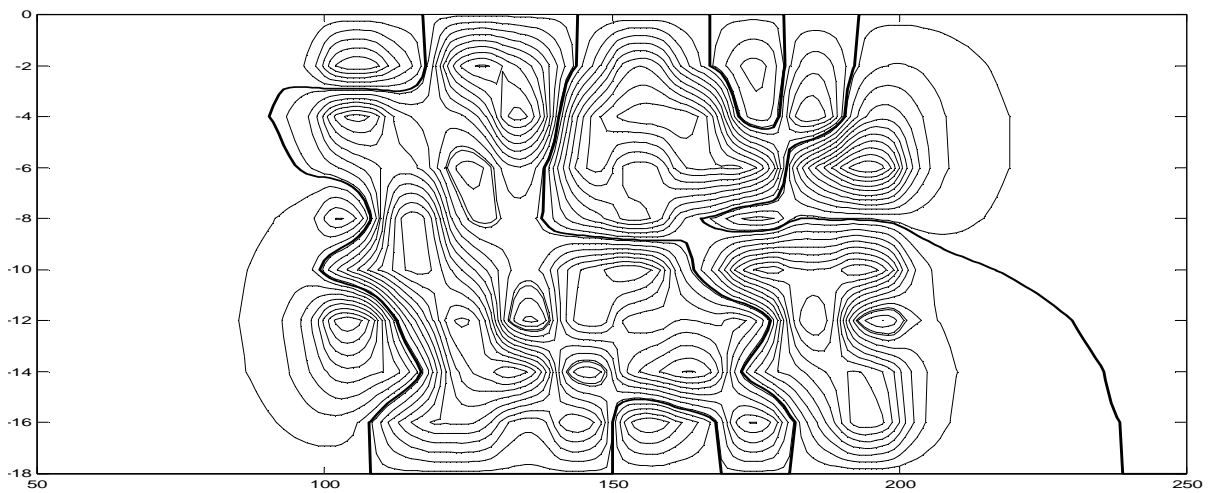


Figuur 6: Analytisch berekende oostwaartse component van het specifieke debiet (m/dag) in alle negen lagen van het water-voerende pakket.

Op basis van de analytische oplossing kunnen ook drie-dimensionale stroomlijnen worden berekend. In figuur 7 zijn de stroomlijnen geprojecteerd overeenkomstig figuur 2: de lijnen starten in het midden van de cellen en worden over 100 m naar het noorden vervolgd.



Figuur 7: Dwarsprofiel met 9 * 20 geprojecteerde stroomlijnen zoals die met de analytisch berekende stromingscomponenten zijn verkregen.



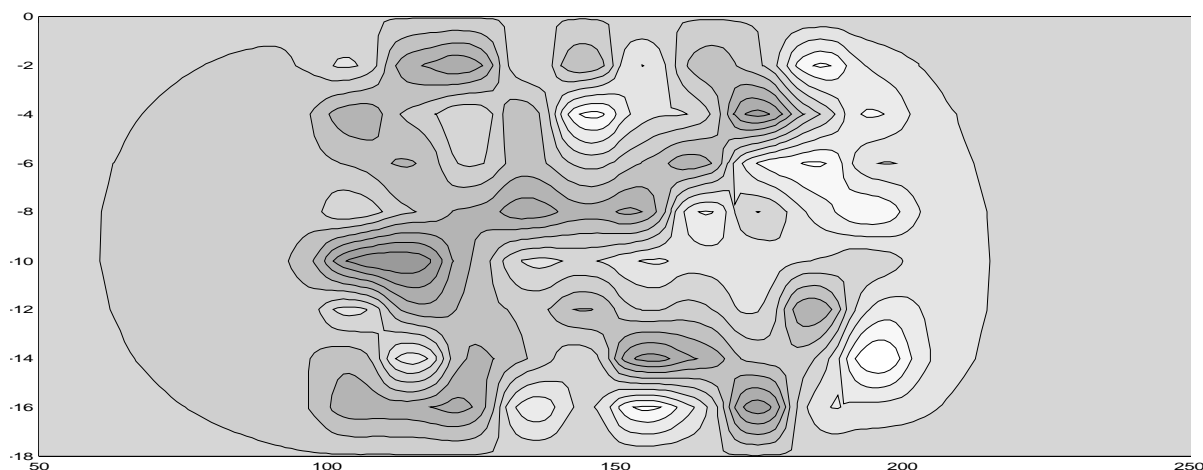
Figuur 8: Verschillende afbeeldingen van hetzelfde wervelpatroon, berekend met de stroomfunctie. In de bovenste figuur is de nulwaarde met een dikkere lijn aangegeven: dit geeft de grens aan tussen de linksom en rechtsom draaiende wervels. In de onderste figuur zijn de rechtsom draaiende wervels licht gekleurd en linksom draaiende wervels donker.

De overeenkomst tussen de figuren 2 en 7 is groot en dit mag als een verificatie van zowel het numerieke als het analytische model worden beschouwd. De geringe verschillen zijn verklaarbaar omdat MicroFEM de k-waarden berekent uit het rekenkundig gemiddelde van de waarden die aan de knooppunten zijn toegekend, en ook omdat de numerieke techniek om de stroomlijnen te berekenen voor beide modellen verschilt.

Een extra voordeel van de analytische methode is dat de oostwaartse component van het specifieke debiet (figuur 6) gemakkelijk van de bovenzijde van het pakket tot een willekeurige diepte kan worden geïntegreerd, waarmee de stroomfunctie wordt verkregen. Deze stroomfunctie is constant langs geprojecteerde stroomlijnen in een dwarsprofiel.

Contourlijnen van deze analytische stroomfunctie (figuur 8) geven een veel completer beeld van het wervelpatroon dan de figuren met de geprojecteerde drie-dimensionale stroomlijnen (figuren 2 en 7). Verder valt uit het gedetailleerde wervelpatroon op dat veel kleine wervels binnen een groter wervelsysteem kunnen voorkomen, waarbij al deze wervels dezelfde draairichting hebben (bijvoorbeeld rechtsonder in figuur 8). Dit ‘whirls within whirls’-verschijnsel blijkt veelvuldig voor te komen en werd al eerder bij eenvoudige testmodellen waargenomen (Bakker en Hemker, 2004).

Het beschreven model is een vrij eenvoudige situatie waarin zeer complexe wervels optreden. Het is echter een bijzonder geval: In het model is de lengterichting van de anisotrope cellen noord, is het gemiddelde van de hoofdrichtingen van de anisotropie in één laag steeds nul (dus ook noord), terwijl met de randvoorwaarden ook een (globale) noord-zuid gradiënt van de stijghoogte is opgelegd. Dat de assen (kernen) van alle wervels naar het noorden lopen, is daarom niet verwonderlijk. Het is echter niet vereist dat deze drie richtingen samenvallen, noch voor de berekening van de numerieke of de analytische oplossing, noch voor het ontstaan van wervels. Ter vergelijking laat figuur 9 het wervelpatroon zien zoals dat ontstaat wanneer in het oorspronkelijke model bij alle anisotropierichtingen 45 graden is opgeteld. De richting van de assen van de wervels blijft noord.



Figuur 9: Dwarsdoorsnede met rechtsonder (licht gekleurd) en linksom (donker gekleurd) draaiende wervels in een model waarbij 45 graden is opgeteld bij de in tabel 1 gegeven anisotropierichtingen.

Wanneer er binnen het model naast de noordelijke stroming ook een oost-west stroming wordt opgelegd, blijven de assen van de wervels toch de lengterichting van de cellen volgen. Tussen de wervels ontstaan dan gebieden (‘openingen’) die de dwarsstroming doorlaten. We kunnen dit analytisch berekenen, maar we hebben hier nog geen onderzoek naar gedaan.

Conclusies

Stroomlijnen in een stationair eindige-elementenmodel met heterogene anisotropie laten een complex patroon van linksom en rechtsom draaiende wervels zien. De numerieke resultaten worden door analytische berekeningen bevestigd. Het optreden van wervels is van praktisch belang omdat hierdoor een versterkte verticale uitwisseling optreedt, die op basis van de globale horizontale stijghoogte-gradiënt en de horizontale gelaagdheid niet zou worden verwacht. Dit kan van groot belang zijn bij de verspreiding van verontreinigingen binnen een pakket.

Referenties

- Bakker, Mark en Kick Hemker (2002)** A Dupuit formulation for flow in layered anisotropic aquifers, in: *Advances in Water Resources*, vol **25**, pag 747–745.
- Bakker, Mark en Kick Hemker (2004)** Analytic solutions for groundwater whirls in box-shaped, layered anisotropic aquifers, aangeboden aan *Advances in Water Resources*.
- Hemker, Kick (2001)** Spiraalvormige stroombanen, in: *Stromingen*, jrg 7, nr 3, pag 5–11.
- Hemker, Kick, Elmer van den Berg en Mark Bakker (2004)** Ground water whirls; in: *Ground Water*, vol **42** (2), pag 234–242.
- Hemker, Kick, Elmer van den Berg en Mark Bakker (in voorbereiding)**, Analytic solutions for groundwater whirls in heterogeneous anisotropic aquifers.
- MDS (2004)** MicroFEM Development and Support. Internet site: www.microfem.com.
- Meesters, A.G.C.A., C. J. Hemker en E. H. van den Berg (2004)** An approximate analytical solution for well flow in anisotropic layered aquifer systems, in: *Journal of Hydrology*, vol **296**, pag 241–253.

